数理解析研究所講究録
144巻 1972年 87-89

Relatively complete family の存在定理

東大 理　牧尾一彦

変形理論における基本的定理に、次の2つがあります。

［完全性定理］

compact complex manifold V の変形 $(\mathcal{V}, B, 0, \pi)$ で[*注参照.] 点 $0 \in B$ における infinitesimal deformation map

$$\rho_0 : T_0(B) \longrightarrow H^1(V, \Theta)$$

が surjective であれば、$(\mathcal{V}, B, 0, \pi)$ は、点 0 で、complete である。ここに、$T_0(B)$ は、B の 0 における接空間、Θ は、V 上の holomorphic vector field の芽の成す層。

［存在定理］

compact complex manifold V で、$H^2(V, \Theta) = 0$ なるものに対しては、V のある変形 $(\mathcal{V}, B, 0, \pi)$ で、その infinitesimal deformation map. $\rho_0 : T_0(B) \longrightarrow H^1(V, \Theta)$

が、isomorphismであるようなものが存在する。

さて、Vのsubmanifold Sが与えられたとします。Vの変形だけでなく、Sの変形も同時に考えて、対(V, S)の変形に対して、上の定理を一般化できるか否かが、ここでの問題です。答はYesです。即ち、次の定理が成立します。

［相対的完全性定理］

対(V, S)の変形$(\mathcal{V}, \mathcal{S}, B, o, \pi)$*注参照で、そのrelative infinitesimal deformation map

$$\rho_0 : T_o(B) \longrightarrow H^1(V, \Xi)$$

が、surjectiveであれば、$(\mathcal{V}, \mathcal{S}, B, o, \pi)$は、点$o \in B$でrelatively completeである。ここに、$T_o(B)$はBのoにおける接空間、Ξは、Sの上ではSに接するV上のholomorphic vector fieldの芽の成す層。（ρ_0の定義は、相対的でない場合と同様）

［Relatively complete familyの存在定理］

対(V, S)で、$H^2(V, \Xi) = 0$なるものに対しては、(V, S)の或る変形$(\mathcal{V}, \mathcal{S}, B, o, \pi)$で、そのrelative infinitesimal deformation map

$$\rho_0 : T_o(B) \longrightarrow H^1(V, \Xi)$$

がisomorphismになるものが、存在する。

証明は、前者については、相対的でない場合と全く平行に行きます。後者については、Sのcodimensionが2以上の場合と、1の場合に分けて証明されます。2以上の場合は、Kodairaのstability定理と、monoidal変換の変形に関するHorikawaの定理（これは、又、最近のNakanoの定理の直接の帰結でもあります）により、直ちに結論されます。codimensionが1の場合は、Ξがlocally free sheafですので、これの、よく知られたfine resolutionをとれば、それにassociateした調和積分論を考えることができ、それを用いて、相対的でない場合の証明と、ほぼ、平行な議論ができ、証明が成ります。以上。

＊注：(V, S)の変形$(\mathcal{V}, \mathcal{S}, B, o, \pi)$とは、次の如きものです。

- $\mathcal{V}$とBは complex manifold
- $\mathcal{S}$は$\mathcal{V}$の submanifold.
- πは、$\mathcal{V}$からBへの holomorphic map で、proper 且 smooth.
- $\pi|\mathcal{S}$ も又、proper 且 smooth.
- oはBの点で、$\pi^{-1}(o) = V$, $V \cap \mathcal{S} = S$.

尚、Vの変形$(\mathcal{V}, B, o, \pi)$とは、上で、$S = \phi$の場合。

c.f. K. Makio, On the existence of the relatively complete deformation of the pair (V, S), (to appear).